最短距離で合格！

~永久保存版~

MATH技

１００%

これで数学(MATH)の点数が

増々（マスマス）増す（マス）！

～座標・グラフ編～

MATH 技1

(a,b) (c,d) **中点の座標は** $\boxed{\left(\dfrac{a+c}{2},\dfrac{b+d}{2}\right)}$ **である。<u>＊中点は、2 点の平均！</u>**

MATH 技2

～直線同士の関係～

① **平行・・・** $\boxed{\text{傾き}}$ **が等しい。**

② **垂直・・・** $\boxed{\text{傾き}}$ **の** $\boxed{\text{積}}$ **が** $\boxed{-1}$

MATH 技3

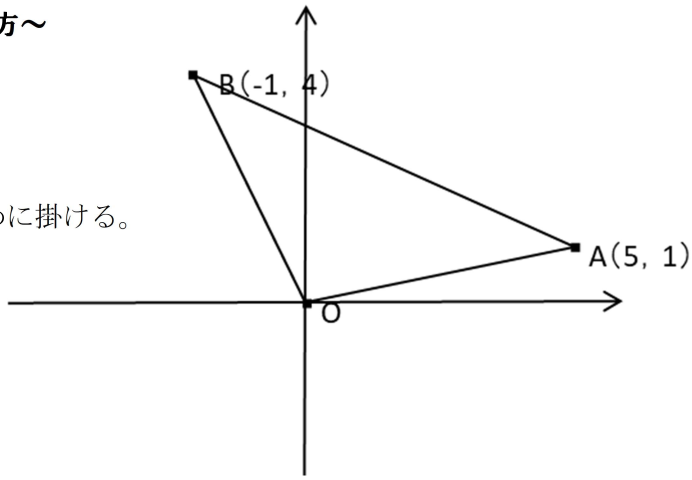
～原点に頂点を持つ三角形の面積の求め方～

<u>練習</u>

右の△OAB の面積を求めなさい。

（求め方）

① 原点以外の 2 点をたてに並べて斜めに掛ける。



（ - 1 ， 4 ）

（ 5 ， 1 ）

$\boxed{20}$ $\boxed{-1}$

② 2 つの差を求める。

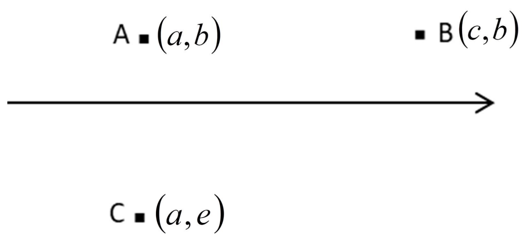
$\boxed{20} - \boxed{-1} = \boxed{21}$

③ ②の差を 2 で割る。

$\boxed{21} \div 2 = \boxed{\dfrac{21}{2}}$

MATH 技4

〜座標平面上の線分の長さの求め方〜



線分 AB の長さ＝ $\boxed{c-a}$

＊「横の長さ＝右－左」で覚える！

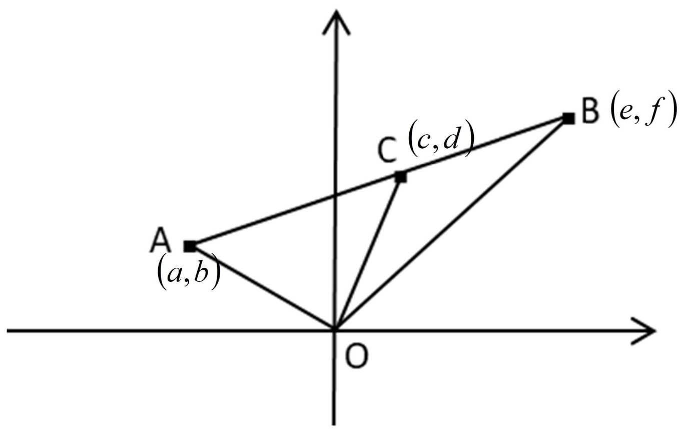
線分 AC の長さ＝ $\boxed{b-e}$

＊「たての長さ＝上－下」で覚える！

ちなみに線分 BC のような斜めの長さは、「直角三角形 ABC で三平方の定理で求める」

MATH 技5

〜座標平面上の三角形の面積比〜



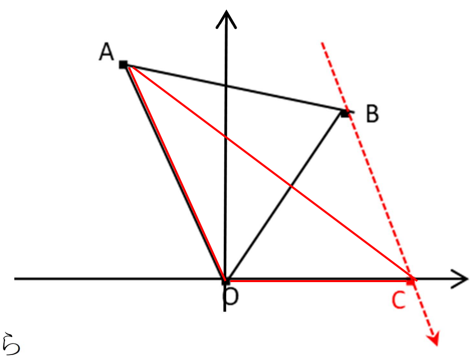
右の図の△AOC と△BOC の面積比は

△AOC : △BOC＝ $\boxed{c-a}$ ： $\boxed{e-c}$

＊「x 座標の差で求められる」と覚える！

MATH 技6

〜座標平面上における等積変形〜



例

右の図で△AOB＝△AOC となるような点 C を x 軸上の正の場所にとるときの点 C を求めよ。

共通な辺 AO に対して点 B を通る平行な線を引く！

このとき，直線 AO と直線 BC は平行なので

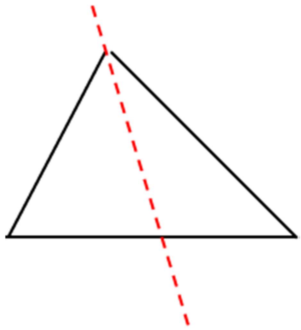
$\boxed{\text{傾き}}$ が等しい。このことと、点 B の座標から

直線 BC の式を求める。最後に直線 BC の式に $y=0$ を代入して、点 C の x 座標を求める。

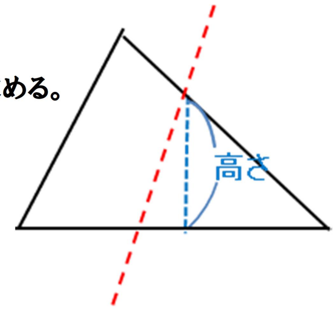
MATH 技7

◎三角形の面積の2等分線

① **三角形の<u>1つの頂点を通る</u>直線によって、面積を2等分する場合、**
その2等分線は、1つの頂点とその反対の辺の 中点 **を通る！**

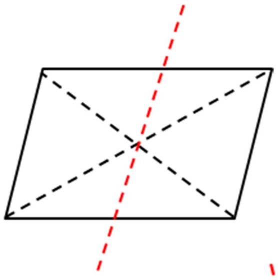


② **三角形の<u>頂点を通らない</u>直線によって、面積を2等分する場合、**
2等分されたうちの三角形の高さを 文字(t) **で表して、面積から高さを求める。**



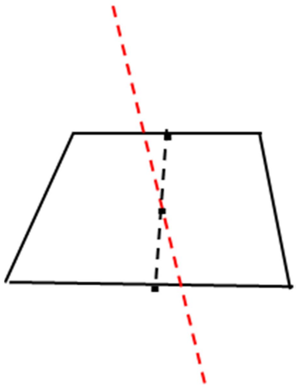
◎平行四辺形・長方形・ひし形・正方形の面積の2等分線

2等分線は、必ず 対角線の中点 **を通る！**



◎台形の面積の2等分線

上底の 中点 **と下底の** 中点 **の** 中点 **を通る！**



MATH 技8

～座標の求め方～

① **グラフ同士の交点は、2つのグラフの式から** 連立方程式 **を立てて求める！**

② **「～となるとき」などの条件付きの座標を求める問題は、**
求める座標の x座標 **を文字（tなど）でおき、条件についての方程式を立てる！**

MATH 技9

～グラフの利用の問題～

① **ダイヤグラムの問題では、「速さ＝グラフの直線の** 傾き **」が成り立つ！**

② **ダイヤグラムの問題において、「出会う・追いつく・追い越す」のは、グラフ上ではグラフ同士の** 交点 **のところである！**

③ **ダイヤグラム以外でも 「単位当たりの量（1あたりの量）＝グラフの直線の** 傾き **」が成り立つ！**

☆グラフの利用の問題は、
解き方の基本は、徹底してグラフ上にすべての点の座標・グラフの式を書き込むこと！！

MATH 技10

～動点問題～

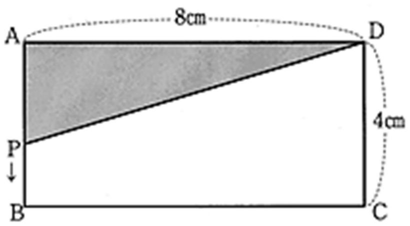
① **カドで状況が変わるので、動く辺上ごとに場合分けした（三角形の）図を描く。**

＊図を描くときは、動点は辺の中途半端なところに書くこと。

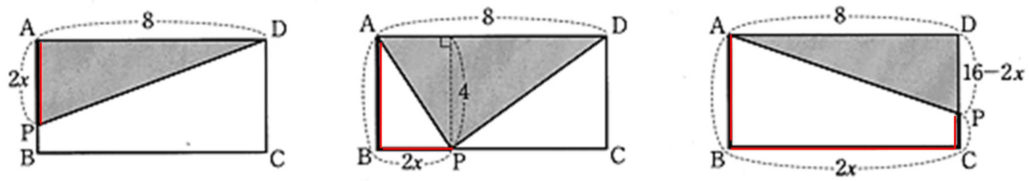
② **図の中に、動点が動いた距離の部分を太線で書き込むこと！**

例 AB＝4㎝，BC＝8㎝の長方形ABCDの辺上を，頂点Aを出発して頂点Dまで，A → B → C → Dの順に，毎秒2㎝の速さで動く点Pがあります。点Pの位置によって，3点A，P，Dを頂点とする△APDの面積はどのように変化するか調べてみよう。

点Pが頂点Aを出発してからx秒後の△APDの面積をy㎠として，Pがどの辺上にあるかで分けて考えます。



① PがAB上にあるとき　② PがBC上にあるとき　③ PがCD上にあるとき



＊赤い線がそれぞれの時の，点P（動点）が動いた距離！

MATH 技11

～2次関数～

$y = ax^2$ **において、**x **の値が** p **から** q **まで変化するとき、変化の割合＝** $a(p+q)$

ちなみに1次関数 $y = ax + b$ **は常に、変化の割合＝** 傾き a

～連立方程式・2次方程式編～

MATH 技 12

～連立方程式の記述の流れ～

① 何を x , y とするか。単位も必ず書くこと！

例：昨年の男子を x 人、女子を y 人とすると～

② 立式する

③ 「これを解くと」に続けて解を書く。立式後の途中式は書かないこと！

例：これを解くと $x=3$， $y=5$

④ ③の解が直接の求める答えでない場合は、求める答えを出すための式・答えを記入。

例：よって、今年の男子は $200\times1.3=260$ 今年の女子は $180\times0.9=162$

⑤ 最後は「これは問題に合う」で締めくくる！

MATH 技 13

～連立方程式の文章題の問題別のポイント～

◎割合の増減の問題

→①必ず前の時期の数を x ， y とする！

②右の形式の表で整理する

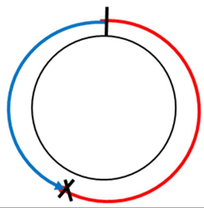
「去年と」増減で立式！

	男子	女子	合計
去年	x 人	y 人	300 人
増減	-0.15x(人)	+0.2y(人)	-20 人
今年	0.7x(人)	1.2y(人)	280 人

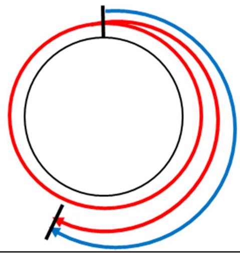
◎速さの出会う・追いつく問題

出会う→2人の距離の 和 について方程式を立てる。

追いつく→2人の距離の 差 について方程式を立てる。



距離の和が1周分



距離の差が1周分

◎～あたりの問題

必ず 1あたりの量 に変えて計算する！

◎その他の文章題

表を書いて、文章中の情報は

すべて記入して整理することで

立式する！右図の表の書き方参照！

＊横には、「モノの種類別の項目」と「合計」を書く。

＊縦には、単位別の項目を書く。

	商品 A	商品 B	合計
個数(個)	x 個	y 個	10 個
代金(円)	120x 円	100y 円	1020 円

MATH 技14

～2 次方程式の記述の流れ～

① **何を x とするか。** 単位 **も必ず書くこと！**

② **立式する**

③ **計算過程の式も書く！**

④ **解を書く。**

⑤ **④の2つの解どちらについても吟味する。** 不等式 **で吟味するのが基本！**
例：$x > 0$ なので $x = 3$ 問題に合う。$x = -2$ は問題に合わない。

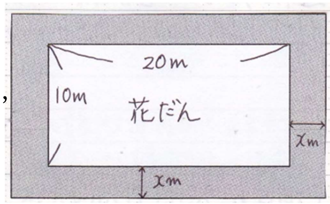
⑥ **⑤の解が直接の求める答えでない場合は、求める答えを出すための式・答えを記入。**
例：よって，歩道の面積の合計は， $14 \times 20 - 112 = 168$(m²)

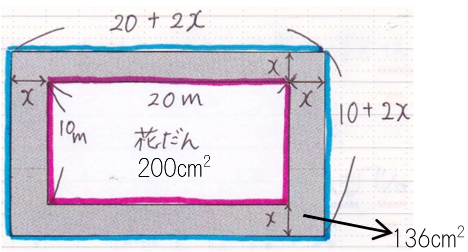
MATH 技 15

～2次方程式の文章題のポイント～

→2次方程式では図形が頻出。図に分かっている・分かる数値を徹底的に書き込め！

例　右の図のように，縦の長さが 10m，横の長さが 20m の長方形の花だんの周囲に幅 x m の道がある。この道の面積が 136m² であるとき，x の値を求めよ。





＊図に徹底的に分かっている or 分かる数値を書き込む！
→結果，式の立て方を見つける！

「全体の長方形の面積＝花だんの面積＋道の面積」と気づく！

$$(10 + 2x)(20 + 2x) = 200 + 136$$

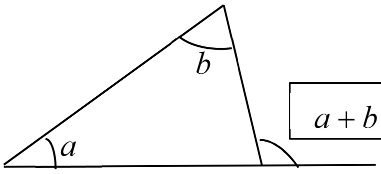
☆文章題の基本
・文章中の「数字」・「多い」「少ない」「等しい」などのキーワードは丸囲み！
・言葉の塊ごとに丸囲みすると視覚的に整理しやすい！

～平面図形編～

MATH 技16

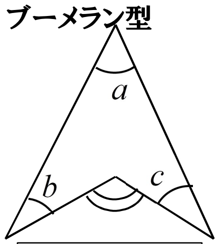
～よく利用する角度の性質～

① 外角の性質



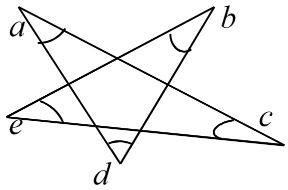
$\boxed{a+b}$

② ブーメラン型



$\boxed{a+b+c}$

② 一筆書きの星型



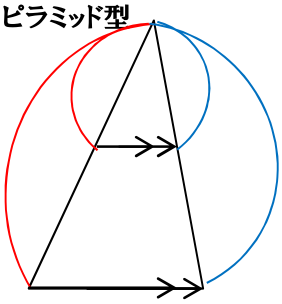
$a+b+c+d+e=$ $\boxed{180^\circ}$

② n角形において，内角の和は $\boxed{180(n-2)}$ **で求められる。外角の和は常に** $\boxed{360}$ **度である。**

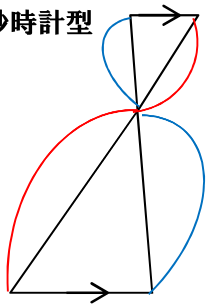
MATH 技17

～代表的な相似形～

① ピラミッド型



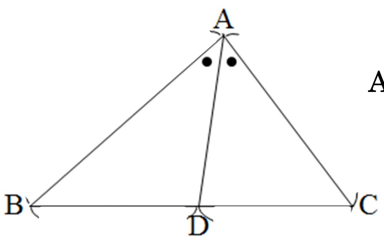
② 砂時計型



＊同じ色の辺同士が対応している！

MATH 技18

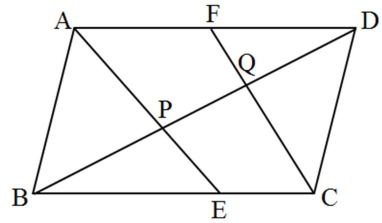
～角の二等分線の性質～



AB : AC ＝ $\boxed{\text{BD : DC}}$

MATH 技19

～1つの辺について、二種類の比で表されている場合の解き方～

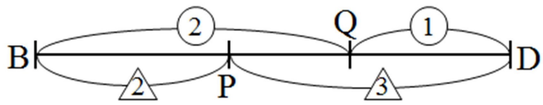


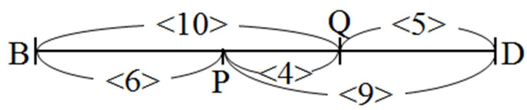
例

BP : PD＝2 : 3, BQ : QD＝2 : 1 のとき、BP : PQ : QD を求めよ

（解法）線分図(左下)において，上の比の項の和 $\boxed{③}$ と下の比の項の和 $\boxed{△5}$ を最小公倍数の $\boxed{\text{<15>}}$ に揃えることで，BP : PQ : QD を求めることができる。

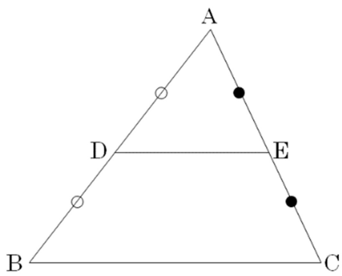
線分図(右下)より，BP : PQ : QD ＝ $\boxed{6 : 4 : 5}$





MATH 技20

～中点連結定理～

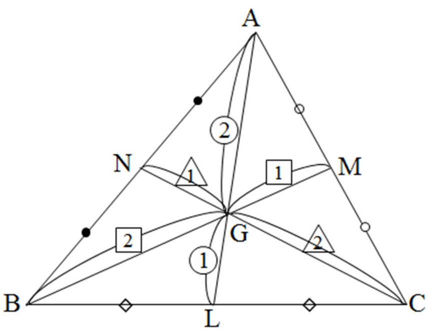


右の図において AD=DB, AE＝EC **のとき**

DE＝BC× $\boxed{\frac{1}{2}}$ と $\boxed{BC}$ // $\boxed{DE}$ が成り立つ。

MATH 技 20

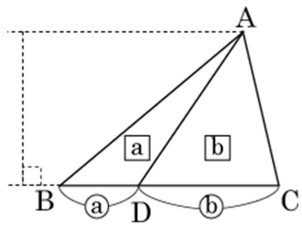
～三角形の重心～



三角形の 3 つの中線は 1 点(点 G)で交わり，この点を三角形の重心という。この重心は，3 つの中線をそれぞれ $\boxed{2 : 1}$ に分ける。

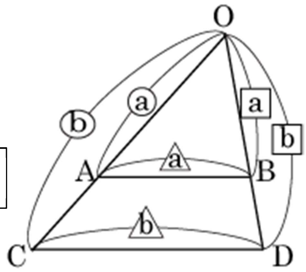
MATH 技 20

～面積比の求め方～



① 高さの等しい三角形

面積の比＝ 底辺 **の比が成り立つ！**



② 相似な図形同士

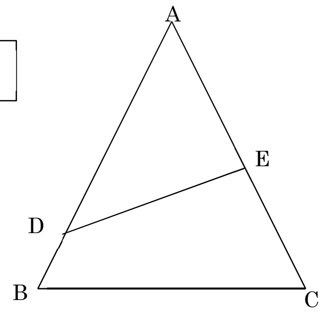
相似比 $a:b$ なら面積比は $a^2:b^2$

＊ちなみに表面積比も $a^2:b^2$ **，体積比は** $a^3:b^3$

③ 一角が等しい三角形同士

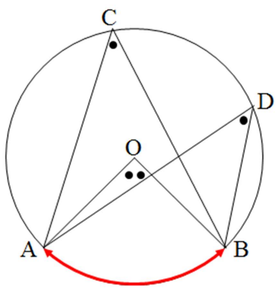
「面積比＝共有する角を挟む 2 辺の積」が成り立つ！（ウッキーの法則）

右の図の△ABCと△ADEの面積比は AB×AC : AD×AE



MATH 技 21

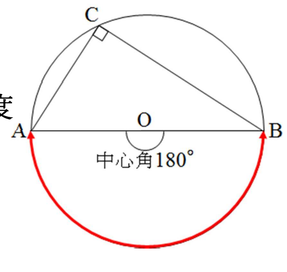
～円周角の定理～



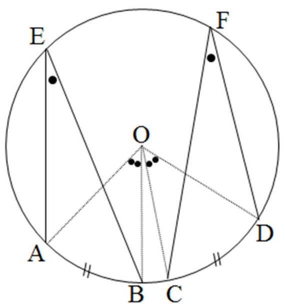
① 1つの弧に対する円周角の大きさは，その弧に対する中心角の半分
(左図において，∠AOB＝2×∠ACB)

② 同じ弧に対する円周角の大きさは等しい
(左図において，∠ACB＝∠ADB)

③ 半円の弧に対する円周角の大きさは 90 度



＊円周角の定理から以下のことも言える



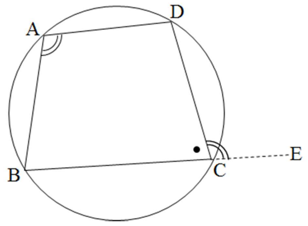
□等しい弧に対する円周角の大きさは等しい

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ から，∠AEB＝∠CFD

MATH 技22

～円に内接する四角形～

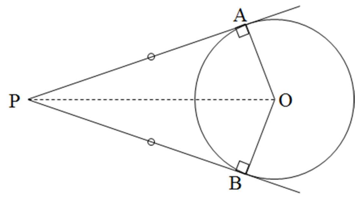
対角線の角の和＝ 180 **度**



MATH 技23

～円と接線～

① 円の中心と接点とを結ぶ半径は，接線と 垂直 **に交わる。**

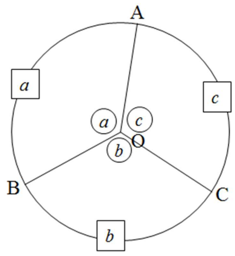


② 円外の 1 点から 1 つの円には 2 本の接線が引け，
その長さは等しくなる！つまり右の図において， PA＝PB

MATH 技24

～中心角（円周角）と弧～

中心角（円周角）の大きさは，弧の長さに 比例 **する。**

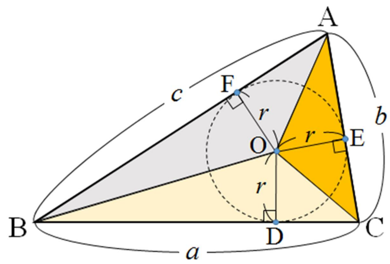


MATH 技25

～内接円の半径の求め方～

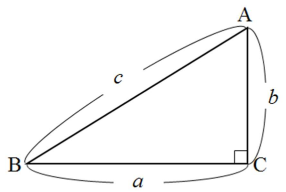
内接円の半径を求める問題は必ず以下の公式で解ける！！

右の図において，△ABC の面積＝ $\frac{1}{2}r(a+b+c)$



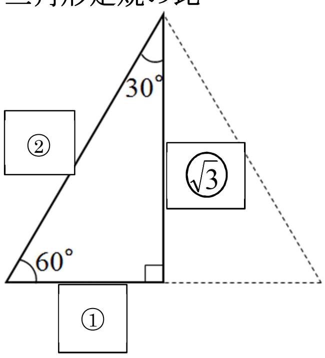
MATH 技26

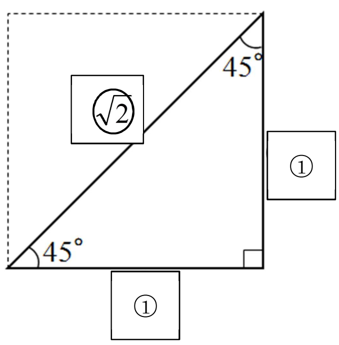
～三平方の定理～



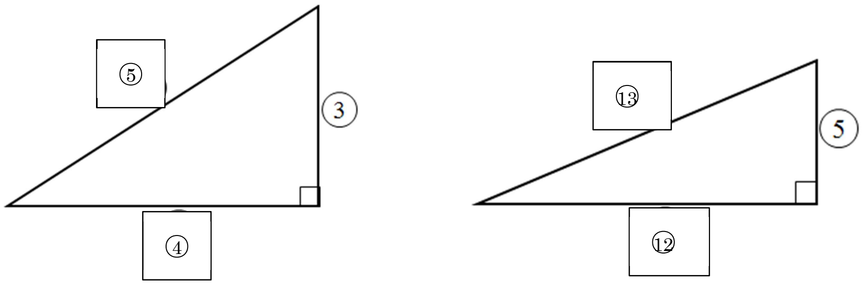
$$c^2 = a^2 + b^2$$

＊三角形定規の比





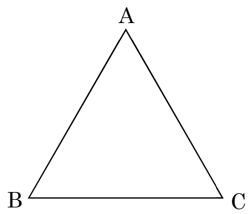
＊３辺がすべて整数比になる直角三角形の辺の比



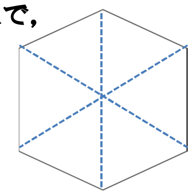
MATH 技27

～正三角形の面積～

正三角形 ABC（1辺の長さを a とする）は $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2}$



また，正六角形の問題は対角線をひくことで，
正三角形を 6 個 **作って考える。**



MATH 技28

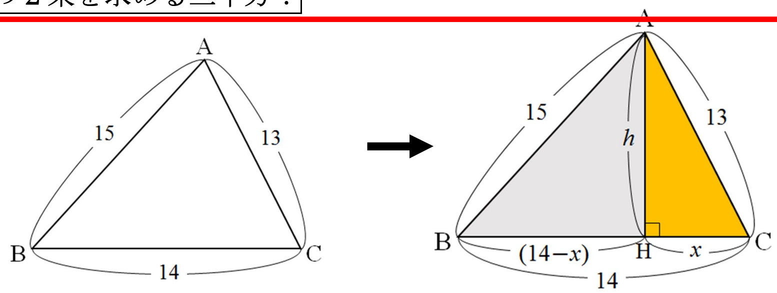
～3 辺既知の三角形の高さの求め方～

以下の手順を公式だと思ってしっかり覚えること！

どの頂点からでもよいので垂線を下ろし，２つの直角三角形に分けて

高さの２乗を求める三平方！

例



△ACH で三平方　$h^2 = 13^2 - x^2 \cdots ①$

△ABH で三平方　$h^2 = 15^2 - (14-x)^2 \cdots ②$

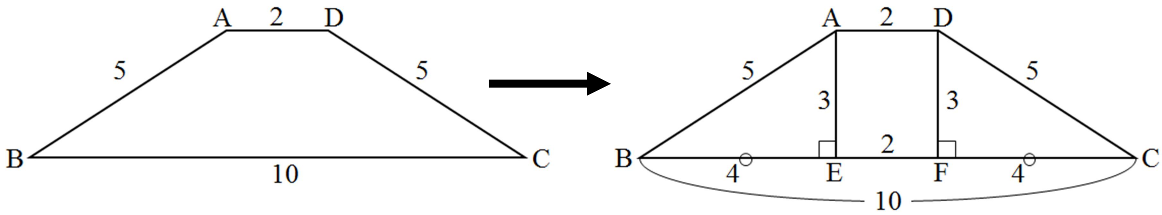
①，②より，$13^2 - x^2 = 15^2 - (14-x)^2$，$169 - x^2 = 225 - (196 - 28x + x^2)$，$169 = 225 - 196 + 28x$

$28x = 140$，$x = 5$，これを①に代入して，$h^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$，$h = 12$

MATH 技29

～等脚台形の高さの求め方～

上底の 2 頂点から下底に向かって $\boxed{\text{垂線}}$ を下ろし，三平方を使って高さを求める。



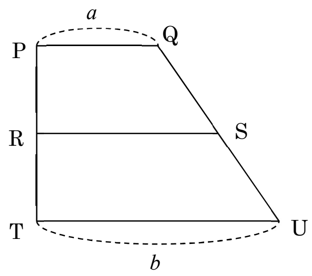
MATH 技 30

～台形の連結された線分の求め方～

① 台形の中点連結定理

右の図で PR＝RT，QS＝SU のとき、

RS＝ $\boxed{\dfrac{a+b}{2}}$

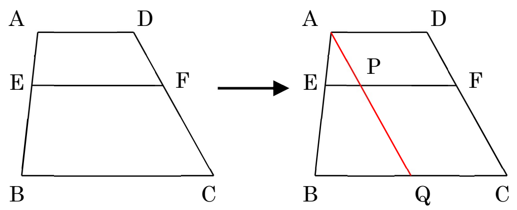


① 台形の中点じゃない連結された線分の求め方

以下の解法を公式と思ってしっかり覚えること！

例

AD=４，BC=７，AE：EB＝1：2 のとき，EF の長さを求めよ。



AB か DC に対して $\boxed{\text{平行線　をひく}}$。（上図では DC に対して平行線をひいた。）

そうすると，四角形 AQCD（四角形 APFD）が $\boxed{\text{平行四辺形}}$ となり，$\boxed{\text{AD=PF=QC=4}}$ となる。よって，△ABQ∽△AEP で EP の長さを求める。

AE：EB＝1：2 より，EP：BQ＝1：3 なので，

BQ=7－4＝3 より，EP=1　　ゆえに，$\boxed{\text{EF=4+1=5}}$ となる。

MATH 技 31

□ 三角形の合同条件　① $\boxed{\text{3 組の辺がそれぞれ等しい}}$
② $\boxed{\text{2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しい}}$
③ $\boxed{\text{1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい}}$

□ 直角三角形の合同条件　① $\boxed{\text{直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しい}}$
② $\boxed{\text{直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しい}}$

□ 三角形の相似条件　① $\boxed{\text{2 組の角がそれぞれ等しい}}$
② $\boxed{\text{2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい。}}$
③ $\boxed{\text{3 組の辺の比がすべて等しい。}}$

＊相似の証明問題では，ほとんど相似条件は $\boxed{\text{2 組の角がそれぞれ等しい}}$ を使う！

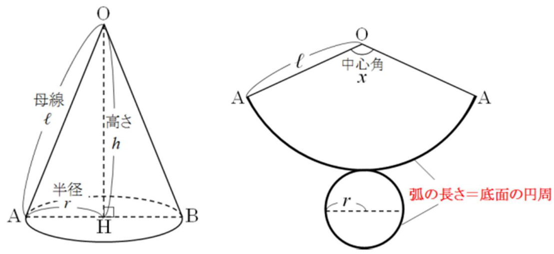
～立体図形編～

MATH 技32

～円すいの公式～　円すいの側面の展開図はおうぎ形になる。

① 側面積(おうぎ形)＝ $\boxed{\text{母線}\times\text{半径}\times\pi}$

② 側面(おうぎ形)の中心角＝ $\boxed{360\times\dfrac{\text{半径}}{\text{母線}}}$



MATH 技33

～球の体積と表面積～

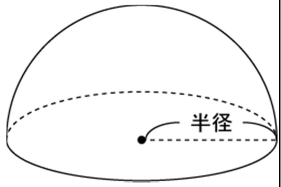
① 体積＝ $\boxed{\dfrac{4}{3}\pi r^3}$

② 表面積＝ $\boxed{4\pi r^2}$

※半球の表面積に注意！

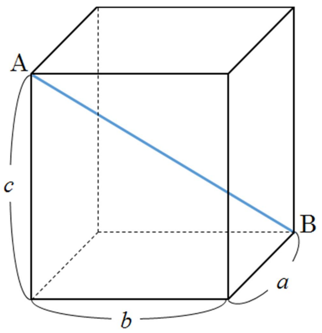
□体積　：球の体積の半分

□表面積：球の表面積の半分＋<u>底の面(円)の面積</u>



MATH 技34

◆空間の対角線の長さ(三平方の定理を利用して求める)◆



AB= $\boxed{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

MATH 技35

～最短距離の求め方～

【解法パターン】

Step1：<u>必要な面のみの</u> $\boxed{\text{展開図}}$ を書く！

Step2：始点と終点を抑える

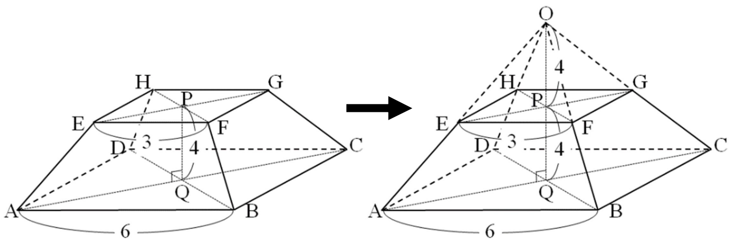
Step3：始点と終点を直線で結ぶ

MATH 技36

～角（円）すい台の体積～

<u>例</u>

下の図の EFGH－ABCD の体積を求めよ



ポイント１：□四角すい(O－ABCD)から四角すい(O－EFGH)を切り取ったと考えよ！

ポイント２：□四角すい(O－EFGH)と四角すい(O－ABCD)は相似！

相似比は上図より，EF : AB＝3 : 6＝1 : 2，これより，OP＝4 となる。

ポイント３：体積の求め方は２通り

①□(O－ABCD)－(O－EFGH)※必修　　②□相似比の３乗＝ 体積比を利用

◆①の場合：(EFGH－ABCD)＝ $6\times6\times8\times\frac{1}{3}-3\times3\times4\times\frac{1}{3}=96-12=84$

◆②の場合：(O－EFGH)＝ $3\times3\times4\times\frac{1}{3}=12$,

また，(O－EFGH)∽(O－ABCD)，相似比 1 : 2 より，体積比 $1^3 : 2^3$＝1 : 8，これより，

すい台部分(EFGH－ABCD)は，比の 7(8－1)にあたるので，(EFGH－ABCD)＝12×7＝84

MATH 技37

～正四面体の体積の公式～

一辺の長さを a とすると

正四面体の高さは $\boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}a}$

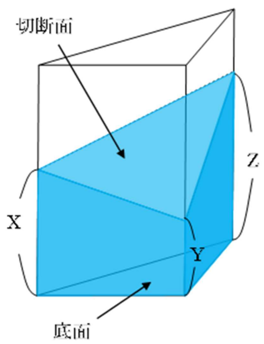
正四面体の体積は $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{12}a^3}$

MATH 技38

～直方体や三角柱の切断された体積の公式～

切断された体積は $\boxed{\text{底面積}\times\text{高さの平均}}$

＊よって，右図の水色の体積は $\boxed{\textbf{底面積}\times\frac{x+y+z}{3}}$



MATH 技39

～内接球の半径の求め方～

→球ごと立体とともに綺麗に真二つにして，

切断面の円について，内接円の公式で解く！

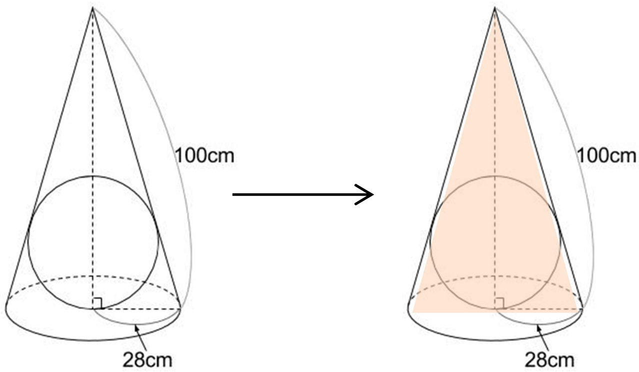
例

下の内接球の半径を求めなさい。

（解き方）ピンク色の切断面で考えると，三角形に内接する円の半径を求める問題として

考えることができる！

よって，三角形の面積 $S = \boxed{\frac{1}{2}r(a+b+c)}$ **を利用！**



MATH 技40

～展開図が正方形になる三角錐～

立方体を1つの頂点と，2つの中点を通る平面で切断してできる三角錐の展開図は

正方形となる！